MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

6. svibnja 2014.

Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija

Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *ima u točki* $T_0 \in D$ **lokalni minimum (***odnosno* **lokalni maksimum)** *ako postoji okolina* $K(T_0, \delta) \subseteq D$ *takva da za sve* $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ *vrijedi*

$$f(T) > f(T_0) \ \ (\text{odnosno } f(T) < f(T_0)).$$

Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija

Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *ima u točki* $T_0 \in D$ **lokalni minimum** (*odnosno* **lokalni maksimum**) *ako postoji okolina* $K(T_0, \delta) \subseteq D$ *takva da za sve* $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ *vrijedi*

$$f(T) > f(T_0) \quad (\text{odnosno } f(T) < f(T_0)).$$

- Točke lokalnih minimuma i točke lokalnih maksimuma funkcije f zajedničkim imenom zovemo točkama **lokalnih ekstrema** funkcije f.

Definicija

Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ima u točki $T_0 \in D$ **lokalni minimum** (*odnosno* **lokalni maksimum)** *ako postoji okolina $K(T_0, \delta) \subseteq D$ takva da za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ vrijedi*

$$f(T) > f(T_0) \quad (\text{odnosno } f(T) < f(T_0)).$$

- Točke lokalnih minimuma i točke lokalnih maksimuma funkcije f zajedničkim imenom zovemo točkama **lokalnih ekstrema** funkcije f.
- Dovoljni i nužni uvjeti za postojanje lokalnog ekstrema u nekoj točki su analogni onima za funkcije jedne varijable, ali složenije izraženi.

Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija

Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ima u točki $T_0 \in D$ **lokalni minimum (***odnosno* **lokalni maksimum)** *ako postoji okolina $K(T_0, \delta) \subseteq D$ takva da za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ vrijedi*

$$f(T) > f(T_0) \quad (\text{odnosno } f(T) < f(T_0)).$$

- Točke lokalnih minimuma i točke lokalnih maksimuma funkcije f zajedničkim imenom zovemo točkama **lokalnih ekstrema** funkcije f.
- Dovoljni i nužni uvjeti za postojanje lokalnog ekstrema u nekoj točki su analogni onima za funkcije jedne varijable, ali složenije izraženi.
- Ponovno ključnu ulogu imaju (parcijalne) derivacije funkcije f.

Teorem (Nužan uvjet ekstrema)

Neka funkcija f ima lokalni ekstrem u točki T_0. Ako postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki T_0, onda je nužno $f'_{x_i}(T_0) = 0$.

Ekstremi funkcija više varijabli

Teorem (Nužan uvjet ekstrema)

Neka funkcija f ima lokalni ekstrem u točki T_0. Ako postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki T_0, onda je nužno $f'_{x_i}(T_0) = 0$.

Napomena

Neka je f kao u teoremu. Ako je f diferencijabilna u točki T_0, onda se nužan uvjet da bi f imala lokalni ekstrem u T_0

$$f'_{x_i}(T_0) = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

može ekvivalentno iskazati preko diferencijala:

$$df(T_0) = 0.$$

Napomena

Ovaj uvjet je nužan, ali ne i dovoljan. Nultočka diferencijala od f*, tj. svaka točka* $T_0 \in D$ *takva da je* $df\left(T_0\right) = 0$ *naziva se* **stacionarna točka** *funkcije* f*. Stacionarne točke su potencijalne točke lokalnih ekstrema.*

Napomena

Ovaj uvjet je nužan, ali ne i dovoljan. Nultočka diferencijala od f, tj. svaka točka $T_0 \in D$ takva da je $df(T_0) = 0$ naziva se **stacionarna točka** *funkcije f. Stacionarne točke su potencijalne točke lokalnih ekstrema.*

- U slučaju funkcije dviju varijabli stacionarnu točku (x_0, y_0) funkcije f geometrijski možemo interpretirati kao točku u kojoj je tangencijalna ravnina na plohu $z = f(x, y)$ paralelna s xy-ravninom.

Napomena

Ovaj uvjet je nužan, ali ne i dovoljan. Nultočka diferencijala od f, tj. svaka točka $T_0 \in D$ takva da je $df\left(T_0\right) = 0$ naziva se **stacionarna točka** *funkcije f. Stacionarne točke su potencijalne točke lokalnih ekstrema.*

- U slučaju funkcije dviju varijabli stacionarnu točku $\left(x_0, y_0\right)$ funkcije f geometrijski možemo interpretirati kao točku u kojoj je tangencijalna ravnina na plohu $z = f\left(x, y\right)$ paralelna s xy-ravninom.
- Jednadžba tangencijalne ravnine u stacionarnoj točki glasi

$$z = z_0 \text{ gdje je } z_0 = f\left(x_0, y_0\right).$$

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$$

ima stacionarnu točku $(-1,2)$ *jer je*

$$f'_x(x,y) = 2x + 2, \qquad f'_y(x,y) = 2y - 4.$$

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$$

ima stacionarnu točku $(-1,2)$ *jer je*

$$f'_x(x,y) = 2x + 2, \qquad f'_y(x,y) = 2y - 4.$$

Nadalje, točka $(-1,2)$ *je i točka lokalnog (a i globalnog na* $\mathbb{R}^2$*) minimuma za* f *jer je*

$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 2$$

Ekstremi funkcija više varijabli

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$$

ima stacionarnu točku $(-1,2)$ *jer je*

$$f'_x(x,y) = 2x + 2, \qquad f'_y(x,y) = 2y - 4.$$

Nadalje, točka $(-1,2)$ *je i točka lokalnog (a i globalnog na* $\mathbb{R}^2$*) minimuma za* f *jer je*

$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 2$$

pa je

$$f(x,y) > -2 = f(-1,2) \text{ za sve } (x,y) \neq (-1,2).$$

Primjer

Funkcija

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$$

ima stacionarnu točku $(-1, 2)$ *jer je*

$$f'_x(x, y) = 2x + 2, \qquad f'_y(x, y) = 2y - 4.$$

Nadalje, točka $(-1, 2)$ *je i točka lokalnog (a i globalnog na* $\mathbb{R}^2$*) minimuma za* f *jer je*

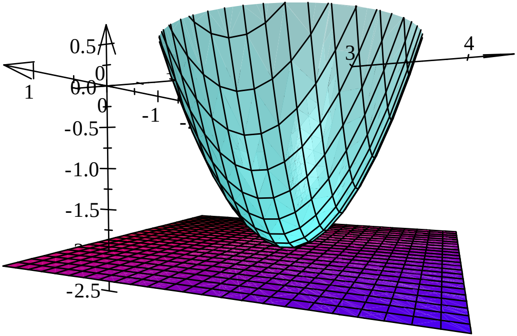
$$f(x, y) = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 2$$

pa je

$$f(x, y) > -2 = f(-1, 2) \text{ za sve } (x, y) \neq (-1, 2).$$

Jednadžba tangencijalne ravnine za plohu $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$ *u točki* $(-1, 2)$ *glasi* $z = -2$.

Ekstremi funkcija više varijabli



$$z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$$

Stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem

Primjer

Funkcija $f(x,y) = xy$ *ima parcijalne derivacije prvog reda*

$$f'_x(x,y) = y, \qquad f'_y(x,y) = x.$$

Očito je točka $(0,0)$ *jedina stacionarna točka za* f.

Stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem

Primjer

Funkcija $f(x,y) = xy$ *ima parcijalne derivacije prvog reda*

$$f'_x(x,y) = y, \qquad f'_y(x,y) = x.$$

Očito je točka $(0,0)$ *jedina stacionarna točka za* f. *Međutim,* $(0,0)$ *nije točka lokalnog ekstrema funkcije* f.

Stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem

Primjer

Funkcija $f(x,y) = xy$ *ima parcijalne derivacije prvog reda*

$$f'_x(x,y) = y, \qquad f'_y(x,y) = x.$$

Očito je točka $(0,0)$ *jedina stacionarna točka za* f. *Međutim,* $(0,0)$ *nije točka lokalnog ekstrema funkcije* f. *Naime, u svakoj okolini točke* $(0,0)$ *postoje točke s koordinatama* (t,t) *za* $t \neq 0$, *u kojima je*

$$f(t,t) = t^2 > 0 = f(0,0),$$

ali isto tako i točke s koordinatama $(t,-t)$ *za* $t \neq 0$, *u kojima je*

$$f(t,-t) = -t^2 < 0 = f(0,0).$$

Stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem

Primjer

Funkcija $f(x,y) = xy$ *ima parcijalne derivacije prvog reda*

$$f'_x(x,y) = y, \qquad f'_y(x,y) = x.$$

Očito je točka $(0,0)$ *jedina stacionarna točka za* f*. Međutim,* $(0,0)$ *nije točka lokalnog ekstrema funkcije* f*. Naime, u svakoj okolini točke* $(0,0)$ *postoje točke s koordinatama* (t,t) *za* $t \neq 0$*, u kojima je*

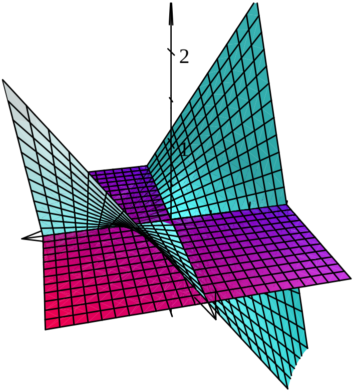
$$f(t,t) = t^2 > 0 = f(0,0),$$

ali isto tako i točke s koordinatama $(t,-t)$ *za* $t \neq 0$*, u kojima je*

$$f(t,-t) = -t^2 < 0 = f(0,0).$$

Dakle, $(0,0)$ *nije ni točka lokalnog maksimuma ni točka lokalnog minimuma, već je nazivamo* **sedlastom točkom** *plohe* $z = xy$*.*

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = xy$ u točki $(0, 0)$ glasi $z = 0$.



$z = xy$

Lokalni maksimum u nestacionarnoj točki

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2x - |y-2|$$

ima u točki $(-1,2)$ *lokalni maksimum (ustvari globalni maksimum na* $\mathbb{R}^2$*)* *jer za sve* $(x,y) \neq (-1,2)$ *vrijedi*

$$f(x,y) = 2 - (x+1)^2 - |y-2| < 2 = f(-1,2).$$

Lokalni maksimum u nestacionarnoj točki

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2x - |y-2|$$

ima u točki $(-1,2)$ *lokalni maksimum (ustvari globalni maksimum na* $\mathbb{R}^2$*)* *jer za sve* $(x,y) \neq (-1,2)$ *vrijedi*

$$f(x,y) = 2 - (x+1)^2 - |y-2| < 2 = f(-1,2).$$

Međutim točku $(-1,2)$ *ne možemo nazvati stacionarnom točkom jer* f *nije diferencijabilna u toj točki.*

Lokalni maksimum u nestacionarnoj točki

Primjer

Funkcija

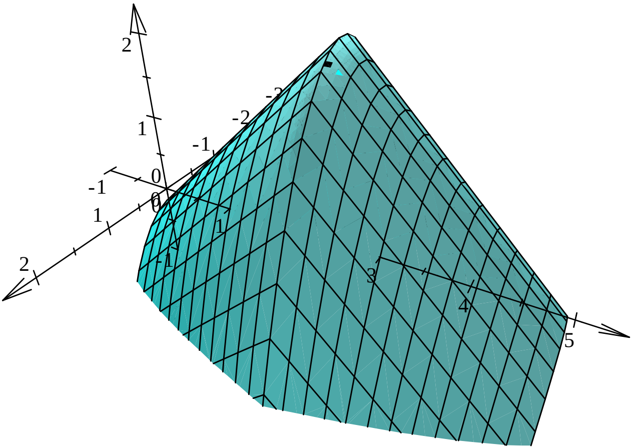
$$f(x, y) = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|$$

ima u točki $(-1, 2)$ *lokalni maksimum (ustvari globalni maksimum na* $\mathbb{R}^2$*)* *jer za sve* $(x, y) \neq (-1, 2)$ *vrijedi*

$$f(x, y) = 2 - (x + 1)^2 - |y - 2| < 2 = f(-1, 2).$$

Međutim točku $(-1, 2)$ *ne možemo nazvati stacionarnom točkom jer* f *nije diferencijabilna u toj točki.*
Naime, $f'_y(-1, 2)$ *ne postoji. Prema tome ne postoji ni tangencijalna ravnina na plohu* $z = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|$ *u točki* $(-1, 2)$*.*

Lokalni maksimum u nestacionarnoj točki



$$z = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|$$

Ekstremi funkcija više varijabli

- Dakle, iako postoji jaka veza između stacionarnih točaka i točaka lokalnih ekstrema funkcije, vidimo da postoje

Ekstremi funkcija više varijabli

- Dakle, iako postoji jaka veza između stacionarnih točaka i točaka lokalnih ekstrema funkcije, vidimo da postoje
  - nestacionarne točke ekstrema,

- Dakle, iako postoji jaka veza između stacionarnih točaka i točaka lokalnih ekstrema funkcije, vidimo da postoje
  - nestacionarne točke ekstrema,
  - stacionarne točke u kojima funkcija nema lokalni ekstrem

- Dakle, iako postoji jaka veza između stacionarnih točaka i točaka lokalnih ekstrema funkcije, vidimo da postoje
  - nestacionarne točke ekstrema,
  - stacionarne točke u kojima funkcija nema lokalni ekstrem
- Prvi problem rješavamo tako da među potencijalne točke ekstrema uključimo i točke u kojima kojima funkcija nije diferencijabilna.

- Dakle, iako postoji jaka veza između stacionarnih točaka i točaka lokalnih ekstrema funkcije, vidimo da postoje
    - nestacionarne točke ekstrema,
    - stacionarne točke u kojima funkcija nema lokalni ekstrem
- Prvi problem rješavamo tako da među potencijalne točke ekstrema uključimo i točke u kojima kojima funkcija nije diferencijabilna.
- Da bismo dali dovoljne uvjete da stacionarna točka bude točka ekstrema, moramo koristiti derivacije viših redova.

- Prema definiciji, funkcija f ima u točki T_0 lokalni ekstrem ako i samo ako je $f(T) - f(T_0)$ stalnog predznaka u nekoj okolini $K(T_0, \delta)$.

- Prema definiciji, funkcija f ima u točki T_0 lokalni ekstrem ako i samo ako je $f(T) - f(T_0)$ stalnog predznaka u nekoj okolini $K(T_0, \delta)$.
- Za ocjenu tog predznaka upotrijebit ćemo Taylorovu formulu za $m = 1$

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0) + R_m(T).$$

$$R_m(T) = \frac{(1-\theta)^{m+1-p}}{m!p} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{m+1} f(T_\theta)$$

s Lagrangeovim oblikom ostatka $(p = m + 1)$.

- Dakle, pretpostavimo li da f ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda na nekoj okolini $K\left(T_0,\delta\right)$ stacionarne točke T_0 i uzevši u obzir da je $df\left(T_0\right)=0$, za svaku točku $T\in K\left(T_0,\delta\right)$ dobijemo

$$f\left(T\right)-f\left(T_0\right)=R_1\left(T\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f\left(T_\theta\right).$$

Ekstremi funkcija više varijabli

- Dakle, pretpostavimo li da f ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda na nekoj okolini $K(T_0, \delta)$ stacionarne točke T_0 i uzevši u obzir da je $df(T_0) = 0$, za svaku točku $T \in K(T_0, \delta)$ dobijemo

$$f(T) - f(T_0) = R_1(T) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(T_\theta).$$

- Zbog neprekidnosti svih parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f, ostatak

$$R_1(T) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(T_\theta)$$

i veličina

$$\widetilde{R}_1(T) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(T_0)$$

se vrlo malo razlikuju kad je točka T dovoljno blizu točki T_0.

Posljedice su sljedeća četiri zaključka:

a) Ako je $\widetilde{R}_1(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni minimum.

Posljedice su sljedeća četiri zaključka:

a) Ako je $\widetilde{R}_1(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni minimum.

b) Ako je $\widetilde{R}_1(T) < 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

Posljedice su sljedeća četiri zaključka:

a) Ako je $\widetilde{R}_1(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni minimum.

b) Ako je $\widetilde{R}_1(T) < 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

c) Ako $\widetilde{R}_1(T)$ mijenja predznak na $K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, odnosno ako je $\widetilde{R}_1(T) > 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i $\widetilde{R}_1(T) < 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 nema lokalni ekstrem. Kažemo da je T_0 sedlasta točka od f.

Posljedice su sljedeća četiri zaključka:

a) Ako je $\widetilde{R}_1(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni minimum.

b) Ako je $\widetilde{R}_1(T) < 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

c) Ako $\widetilde{R}_1(T)$ mijenja predznak na $K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, odnosno ako je $\widetilde{R}_1(T) > 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i $\widetilde{R}_1(T) < 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 nema lokalni ekstrem. Kažemo da je T_0 sedlasta točka od f.

d) Ako je $\widetilde{R}_1(T) \geq 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i ako postoji točka $T \neq T_0$ u kojoj je $\widetilde{R}_1(T) = 0$, ili ako je $\widetilde{R}_1(T) \leq 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i postoji točka $T \neq T_0$ u kojoj je $\widetilde{R}_1(T) = 0$, onda je potrebna daljnja analiza.

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)

Neka funkcija f u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ stacionarne točke T_0 ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)

Neka funkcija f u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ stacionarne točke T_0 ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Uvedimo oznake

$$A_{ij} = f''_{x_i x_j}(T_0) \ \text{za } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

i definirajmo veličine Δ_r za $r = 1, 2, \ldots, n$ formulama

$$\Delta_1 = A_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

$$\text{i općenito } \Delta_r = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}, \ \text{za } r = 1, \ldots, n.$$

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)

Tada vrijedi:

a) $\Delta_r > 0$ *za sve* $r \Rightarrow f$ *ima u lokalni minimum u* T_0;

Ekstremi funkcija više varijabli

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)

Tada vrijedi:

a) $\Delta_r > 0$ *za sve* $r \Rightarrow f$ *ima u lokalni minimum u* T_0;

b) $\Delta_r < 0$ *za sve neparne* r *i* $\Delta_r > 0$ *za sve parne* r
$\Rightarrow f$ *ima lokalnu maksimum u* T_0;

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)

Tada vrijedi:

a) $\Delta_r > 0$ *za sve* $r \Rightarrow f$ *ima u lokalni minimum u* T_0;

b) $\Delta_r < 0$ *za sve neparne* r *i* $\Delta_r > 0$ *za sve parne* r
$\Rightarrow f$ *ima lokalnu maksimum u* T_0;

c) $\Delta_r < 0$ *za barem jedan parni* r *ili postoje dva neparna indeksa* r *i* r' *takva da je* $\Delta_r > 0$ *i* $\Delta_{r'} < 0$
$\Rightarrow f$ *nema lokalni ekstrem u* T_0;

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)

Tada vrijedi:

a) $\Delta_r > 0$ *za sve* $r \Rightarrow f$ *ima u lokalni minimum u* T_0;

b) $\Delta_r < 0$ *za sve neparne* r *i* $\Delta_r > 0$ *za sve parne* r
$\Rightarrow f$ *ima lokalnu maksimum u* T_0;

c) $\Delta_r < 0$ *za barem jedan parni* r *ili postoje dva neparna indeksa* r *i* r' *takva da je* $\Delta_r > 0$ *i* $\Delta_{r'} < 0$
$\Rightarrow f$ *nema lokalni ekstrem u* T_0;

d) $\Delta_r \geq 0$ *za sve* r *i* $\Delta_r = 0$ *za barem jedan* r *ili*
$\Delta_r \leq 0$ *za sve* r *i* $\Delta_r = 0$ *za barem jedan* r
$\Rightarrow f$ *može i ne mora imati lokalni ekstrem u* T_0.

Napomena

a) Prema Schwartzovom teoremu vrijedi $A_{ij} = A_{ji}$ *pa su* Δ_r *determinante simetričnih matrica.*

Napomena

a) Prema Schwartzovom teoremu vrijedi $A_{ij} = A_{ji}$ pa su Δ_r determinante simetričnih matrica.
b) Za funkcije dviju varijabli imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0)\,,\ A_{12} = A_{21} = f''_{xy}(x_0, y_0)\,,\ A_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$$
$$\Delta_1 = A_{11}, \qquad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$$

Napomena

a) Prema Schwartzovom teoremu vrijedi $A_{ij} = A_{ji}$ *pa su* Δ_r *determinante simetričnih matrica.*
b) Za funkcije dviju varijabli imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0), \ A_{12} = A_{21} = f''_{xy}(x_0, y_0), \ A_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$$
$$\Delta_1 = A_{11}, \qquad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$$

Prethodni teorem se tada svodi na slijedeća četiri slučaja:

1. $\Delta_1 > 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* (x_0, y_0) *lokalni minimum,*

Napomena

a) Prema Schwartzovom teoremu vrijedi $A_{ij} = A_{ji}$ pa su Δ_r determinante simetričnih matrica.
b) Za funkcije dviju varijabli imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}\left(x_0, y_0\right), \; A_{12} = A_{21} = f''_{xy}\left(x_0, y_0\right), \; A_{22} = f''_{yy}\left(x_0, y_0\right)$$
$$\Delta_1 = A_{11}, \qquad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$$

Prethodni teorem se tada svodi na slijedeća četiri slučaja:

1. $\Delta_1 > 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* $\left(x_0, y_0\right)$ *lokalni minimum,*
2. $\Delta_1 < 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* $\left(x_0, y_0\right)$ *lokalni maksimum,*

Napomena

a) Prema Schwartzovom teoremu vrijedi $A_{ij} = A_{ji}$ *pa su* Δ_r *determinante simetričnih matrica.*
b) Za funkcije dviju varijabli imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0)\,,\ A_{12} = A_{21} = f''_{xy}(x_0, y_0)\,,\ A_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$$
$$\Delta_1 = A_{11}, \qquad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$$

Prethodni teorem se tada svodi na slijedeća četiri slučaja:

1. $\Delta_1 > 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* (x_0, y_0) *lokalni minimum,*
2. $\Delta_1 < 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* (x_0, y_0) *lokalni maksimum,*
3. $\Delta_2 < 0 \Rightarrow f$ *nema u* (x_0, y_0) *lokalni ekstrem,*

Napomena

a) Prema Schwartzovom teoremu vrijedi $A_{ij} = A_{ji}$ *pa su* Δ_r *determinante simetričnih matrica.*
b) Za funkcije dviju varijabli imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0)\,,\; A_{12} = A_{21} = f''_{xy}(x_0, y_0)\,,\; A_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$$
$$\Delta_1 = A_{11}\,, \qquad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$$

Prethodni teorem se tada svodi na slijedeća četiri slučaja:

1. $\Delta_1 > 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* (x_0, y_0) *lokalni minimum,*
2. $\Delta_1 < 0$ *i* $\Delta_2 > 0 \Rightarrow f$ *ima u* (x_0, y_0) *lokalni maksimum,*
3. $\Delta_2 < 0 \Rightarrow f$ *nema u* (x_0, y_0) *lokalni ekstrem,*
4. $\Delta_2 = 0 \Rightarrow f$ *u* (x_0, y_0) *može i ne mora imati lokalni ekstrem.*

Primjer

Pokazali smo da funkcija

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$$

ima jedinu stacionarnu točku $(-1, 2)$. *Parcijalne derivacije drugog reda su konstantne funkcije*

$$f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = 2, \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0$$

pa je (u točki $(-1, 2)$*)*

$$\Delta_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Po teoremu zaključujemo da f *ima u* $(-1, 2)$ *lokalni minimum.*

Primjer

Jedina stacionarna točka funkcije $f(x,y) = xy$ *je* $(0,0)$. *Parcijalne derivacije drugog reda su konstantne funkcije*

$$f''_{xx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = 0, \qquad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 1$$

pa u $(0,0)$ *imamo*

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Prema teoremu, f *nema lokalni ekstrem u* $(0,0)$.

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2x - |y-2|$$

ima u točki $(-1,2)$ *lokalni maksimum, ali taj zaključak ne možemo dobiti primjenom teorema jer* f *nema neprekidne parcijalne derivacije drugog reda.*

Primjer

Funkcija $f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2$ *je beskonačno derivabilna te je*

$$f'_x(x,y,z) = -4x, \quad f'_y(x,y,z) = -2y, \quad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

Ekstremi funkcija više varijabli

Primjer

Funkcija $f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2$ *je beskonačno derivabilna te je*

$$f'_x(x, y, z) = -4x, \quad f'_y(x, y, z) = -2y, \quad f'_z(x, y, z) = -6z.$$

Očito je $(0, 0, 0)$ *jedina stacionarna točka funkcije* f*.*

Primjer

Funkcija $f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2$ *je beskonačno derivabilna te je*

$$f'_x(x,y,z) = -4x, \quad f'_y(x,y,z) = -2y, \quad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

Očito je $(0,0,0)$ *jedina stacionarna točka funkcije* f. *Parcijalne derivacije drugog reda su konstantne*

$$f''_{xx} = -4, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{zz} = -6, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$$

Primjer

Funkcija $f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2$ *je beskonačno derivabilna te je*

$$f'_x(x,y,z) = -4x, \quad f'_y(x,y,z) = -2y, \quad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

Očito je $(0,0,0)$ *jedina stacionarna točka funkcije* f*. Parcijalne derivacije drugog reda su konstantne*

$$f''_{xx} = -4, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{zz} = -6, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$$

pa u $(0,0,0)$ *imamo* $\qquad \Delta_1 = -4 < 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Primjer

Funkcija $f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2$ *je beskonačno derivabilna te je*

$$f'_x(x,y,z) = -4x, \quad f'_y(x,y,z) = -2y, \quad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

Očito je $(0,0,0)$ *jedina stacionarna točka funkcije* f. *Parcijalne derivacije drugog reda su konstantne*

$$f''_{xx} = -4, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{zz} = -6, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$$

pa u $(0,0,0)$ *imamo* $\quad \Delta_1 = -4 < 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Prema teoremu zaključujemo da f *ima u* $(0,0,0)$ *lokalni maksimum.*

Primjer

Slično, funkcija $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ *ima parcijalne derivacije*

$$f'_x(x, y, z) = 4x, \quad f'_y(x, y, z) = 2y, \quad f'_z(x, y, z) = -6z.$$

i stacionarnu točku $(0, 0, 0)$.

Primjer

Slično, funkcija $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ *ima parcijalne derivacije*

$$f'_x(x, y, z) = 4x, \quad f'_y(x, y, z) = 2y, \quad f'_z(x, y, z) = -6z.$$

i stacionarnu točku $(0, 0, 0)$. *Parcijalne derivacije drugog reda su*

$$f''_{xx} = 4, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{zz} = -6, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$$

Primjer

Slično, funkcija $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ *ima parcijalne derivacije*

$$f'_x(x,y,z) = 4x, \quad f'_y(x,y,z) = 2y, \quad f'_z(x,y,z) = -6z.$$

i stacionarnu točku $(0,0,0)$. *Parcijalne derivacije drugog reda su*

$$f''_{xx} = 4, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{zz} = -6, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$$

pa u $(0,0,0)$ *imamo* $\quad \Delta_1 = 4 > 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Primjer

Slično, funkcija $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ *ima parcijalne derivacije*

$$f_x'(x, y, z) = 4x, \quad f_y'(x, y, z) = 2y, \quad f_z'(x, y, z) = -6z.$$

i stacionarnu točku $(0, 0, 0)$. *Parcijalne derivacije drugog reda su*

$$f_{xx}'' = 4, \quad f_{yy}'' = 2, \quad f_{zz}'' = -6, \quad f_{xy}'' = f_{xz}'' = f_{yz}'' = 0$$

pa u $(0, 0, 0)$ *imamo* $\quad \Delta_1 = 4 > 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Prema teoremu, f *nema lokalni ekstrem u* $(0, 0, 0)$.

Ekstremi funkcija više varijabli

Primjer

Pogledajmo funkcije

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^4, \\ g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^3. \end{aligned}$$

Primjer

Pogledajmo funkcije

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^4, \\ g(x,y,z) &= x^2+y^2+z^3. \end{aligned}$$

Očito je $(0,0,0)$ *točka lokalnog (zapravo globalnog) minimuma funkcije* f *jer je*

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^4 > 0 = f(0,0,0) \text{ za } (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Ekstremi funkcija više varijabli

Primjer

Pogledajmo funkcije

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^4, \\ g(x,y,z) &= x^2+y^2+z^3. \end{aligned}$$

Očito je $(0,0,0)$ *točka lokalnog (zapravo globalnog) minimuma funkcije* f *jer je*

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^4 > 0 = f(0,0,0) \ \text{za} \ (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Nadalje, $(0,0,0)$ *nije točka lokalnog ekstrema funkcije* g *jer je za svaki* $t > 0$

$$\begin{aligned} g(0,0,t) &= t^3 > 0 = g(0,0,0), \\ g(0,0,-t) &= -t^3 < 0 = g(0,0,0). \end{aligned}$$

Primjer

S druge strane, $(0,0,0)$ *je stacionarna točka i od* f *i od* g *jer je*

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= g'_x(x,y,z) = 2x, \\ f'_y(x,y,z) &= g'_y(x,y,z) = 2y, \\ f'_z(x,y,z) &= 4z^3, \quad g'_z(x,y,z) = 3z^2. \end{aligned}$$

Primjer

S druge strane, $(0,0,0)$ *je stacionarna točka i od* f *i od* g *jer je*

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= g'_x(x,y,z) = 2x, \\ f'_y(x,y,z) &= g'_y(x,y,z) = 2y, \\ f'_z(x,y,z) &= 4z^3, \quad g'_z(x,y,z) = 3z^2. \end{aligned}$$

Jednostavnim računom se provjeri da za obje funkcije u $(0,0,0)$ *imamo*

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

što je slučaj d) iz teorema.

Problem vezanog ekstrema

Postavlja se pitanje kako pronaći ekstreme funkcije uz neki dodatni uvjet, npr. samo na određenom podskupu domene.

Problem vezanog ekstrema

Postavlja se pitanje kako pronaći ekstreme funkcije uz neki dodatni uvjet, npr. samo na određenom podskupu domene.
Recimo:

- naći ekstremne vrijednosti funkcije $z = xy$ na kružnici $x^2 + y^2 = 2$,

Problem vezanog ekstrema

Postavlja se pitanje kako pronaći ekstreme funkcije uz neki dodatni uvjet, npr. samo na određenom podskupu domene.
Recimo:

- naći ekstremne vrijednosti funkcije $z = xy$ na kružnici $x^2 + y^2 = 2$,
- naći ekstremne vrijednosti funkcije $z = x^2 + y^2$ na pravcu $x + y = 2$.

Problem vezanog ekstrema

- Pretpostavimo da su zadane dvije funkcije dviju varijabla $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$ definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Problem vezanog ekstrema

- Pretpostavimo da su zadane dvije funkcije dviju varijabla $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$ definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Funkciji φ pridružimo implicitnu jednadžbu

$$\varphi(x, y) = 0$$

i pripadajući skup $S \subseteq D$ definiran tom jednadžbom

$$S = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}.$$

Problem vezanog ekstrema

- Pretpostavimo da su zadane dvije funkcije dviju varijabla $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$ definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Funkciji φ pridružimo implicitnu jednadžbu

$$\varphi(x, y) = 0$$

i pripadajući skup $S \subseteq D$ definiran tom jednadžbom

$$S = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}.$$

- Definiramo lokalni ekstrem funkcije f uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$:

Definicija

Ako za točku $T_0 = (x_0, y_0) \in S$ *postoji okolina* $K(T_0, \delta) \subseteq D$ *tako da je*

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \ \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f *u točki* T_0 *ima* **vezani (uvjetni) lokalni minimum** *uz uvjet* $\varphi(x, y) = 0$.

Problem vezanog ekstrema

Definicija

Ako za točku $T_0 = (x_0, y_0) \in S$ *postoji okolina* $K(T_0, \delta) \subseteq D$ *tako da je*

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \ \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f *u točki* T_0 *ima* **vezani (uvjetni) lokalni minimum** *uz uvjet* $\varphi(x, y) = 0$.
Ako je

$$f(x, y) < f(x_0, y_0), \ \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f *u točki* T_0 *ima* **vezani (uvjetni) lokalni maksimum** *uz uvjet* $\varphi(x, y) = 0$.

Problem vezanog ekstrema

Definicija

Ako za točku $T_0 = (x_0, y_0) \in S$ *postoji okolina* $K(T_0, \delta) \subseteq D$ *tako da je*

$$f(x,y) > f(x_0,y_0), \ \forall (x,y) \in S \cap K(T_0,\delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f *u točki* T_0 *ima* **vezani (uvjetni) lokalni minimum** *uz uvjet* $\varphi(x,y) = 0$.
Ako je

$$f(x,y) < f(x_0,y_0), \ \forall (x,y) \in S \cap K(T_0,\delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f *u točki* T_0 *ima* **vezani (uvjetni) lokalni maksimum** *uz uvjet* $\varphi(x,y) = 0$.
Zajedničkim imenom ih zovemo točkama **vezanih (uvjetnih) lokalnih ekstrema**.

Problem vezanog ekstrema

Problem određivanja točaka u kojima funkcija $z = f(x, y)$ ima vezane lokalne ekstreme uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ kraće zapisujemo

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Problem vezanog ekstrema

Problem određivanja točaka u kojima funkcija $z = f(x, y)$ ima vezane lokalne ekstreme uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ kraće zapisujemo

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

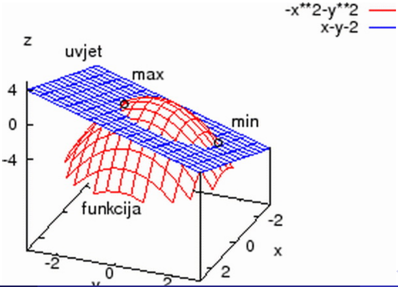
Taj problem možemo geometrijski interpretirati na sljedeći način: među točkama (x, y, z) plohe zadane eksplicitno sa $z = f(x, y)$ čije prve dvije koordinate određuju točku iz S tražimo one u kojima je vrijednost koordinate z lokalno najmanja (najveća).

Problem vezanog ekstrema

Problem određivanja točaka u kojima funkcija $z = f(x, y)$ ima vezane lokalne ekstreme uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ kraće zapisujemo

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Taj problem možemo geometrijski interpretirati na sljedeći način: među točkama (x, y, z) plohe zadane eksplicitno sa $z = f(x, y)$ čije prve dvije koordinate određuju točku iz S tražimo one u kojima je vrijednost koordinate z lokalno najmanja (najveća).



Problem vezanog ekstrema

- Ako su funkcije f i φ dovoljno 'lijepe' (npr. neprekidno derivabilne) mogu se dati nužni i dovoljni uvjeti da bi neka točka (x_0, y_0) bila rješenje tog problema.

Problem vezanog ekstrema

- Ako su funkcije f i φ dovoljno 'lijepe' (npr. neprekidno derivabilne) mogu se dati nužni i dovoljni uvjeti da bi neka točka (x_0, y_0) bila rješenje tog problema.
- Pretpostavimo dakle da f i φ imaju neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Neka je $(x_0, y_0) \in S$ takva da je

$$\varphi_y'(x, y) \neq 0.$$

Problem vezanog ekstrema

- Ako su funkcije f i φ dovoljno 'lijepe' (npr. neprekidno derivabilne) mogu se dati nužni i dovoljni uvjeti da bi neka točka (x_0, y_0) bila rješenje tog problema.
- Pretpostavimo dakle da f i φ imaju neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Neka je $(x_0, y_0) \in S$ takva da je
$$\varphi'_y(x, y) \neq 0.$$
- Koristeći tvrdnju (i) iz teorema o implicitno zadanoj funkciji zaključujemo da mora postojati otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $x_0 \in I$ i točno jedna funkcija $y = g(x)$, $x \in I$ implicitno zadana jednadžbom $\varphi(x, y) = 0$.

Problem vezanog ekstrema

- Ako su funkcije f i φ dovoljno 'lijepe' (npr. neprekidno derivabilne) mogu se dati nužni i dovoljni uvjeti da bi neka točka (x_0, y_0) bila rješenje tog problema.
- Pretpostavimo dakle da f i φ imaju neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Neka je $(x_0, y_0) \in S$ takva da je
$$\varphi'_y(x, y) \neq 0.$$
- Koristeći tvrdnju (i) iz teorema o implicitno zadanoj funkciji zaključujemo da mora postojati otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $x_0 \in I$ i točno jedna funkcija $y = g(x)$, $x \in I$ implicitno zadana jednadžbom $\varphi(x, y) = 0$.
- Zbog toga funkciju $f(x, y)$, $(x, y) \in S$ možemo lokalno, u nekoj okolini promatrane točke (x_0, y_0) interpretirati kao funkciju samo jedne varijable x,
$$z = \widetilde{f}(x) = f(x, g(x)), \qquad x \in I.$$

Problem vezanog ekstrema

- Očigledno vrijedi sljedeća tvrdnja:
  Funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum (maksimum) ako i samo ako funkcija $\widetilde{f}$ u točki x_0 ima lokalni minimum (maksimum).

Problem vezanog ekstrema

- Očigledno vrijedi sljedeća tvrdnja:
  Funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum (maksimum) ako i samo ako funkcija $\widetilde{f}$ u točki x_0 ima lokalni minimum (maksimum).
- Prema tvrdnji (ii) teorema o implicitnoj funkciji znamo da je g neprekidno derivabilna na I i da je

$$g'(x) = -\frac{\varphi_x'(x, y)}{\varphi_y(x, y)}. \tag{A1}$$

- Očigledno vrijedi sljedeća tvrdnja:
  Funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum (maksimum) ako i samo ako funkcija $\widetilde{f}$ u točki x_0 ima lokalni minimum (maksimum).
- Prema tvrdnji (ii) teorema o implicitnoj funkciji znamo da je g neprekidno derivabilna na I i da je

$$g'(x) = -\frac{\varphi_x'(x, y)}{\varphi_y(x, y)}. \tag{A1}$$

- Budući da smo pretpostavili da φ ima neprekidne i parcijalne derivacije drugog reda, zaključujemo da g na I ima neprekidnu i drugu derivaciju.

Problem vezanog ekstrema

- Iz (A1) koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija više varijabli dobivamo da je

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{\varphi'_x(x,y)\left[\varphi''_{yx}(x,y)+\varphi''_{yy}(x,y)\,g'(x)\right]}{\varphi'_y(x,y)^2} \\
&\quad - \frac{\left[\varphi''_{xx}(x,y)+\varphi''_{xy}(x,y)\,g'(x)\right]\varphi'_y(x,y)}{\varphi'_y(x,y)^2},
\end{aligned}
$$

Problem vezanog ekstrema

- Iz (A1) koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija više varijabli dobivamo da je

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\varphi'_x(x,y)\left[\varphi''_{yx}(x,y) + \varphi''_{yy}(x,y)\,g'(x)\right]}{\varphi'_y(x,y)^2} \\ &\quad - \frac{\left[\varphi''_{xx}(x,y) + \varphi''_{xy}(x,y)\,g'(x)\right]\varphi'_y(x,y)}{\varphi'_y(x,y)^2}, \end{aligned}$$

- Sređivanjem i još jednom upotrebom formule (A1) dobijemo

$$g''(x) = \frac{\varphi''_{xx}(x,y) + 2\varphi''_{xy}(x,y)\,g'(x) + +\varphi''_{yy}(x,y)\,g'(x)^2}{-\varphi'_y(x,y)} \qquad \text{(A2)}$$

Problem vezanog ekstrema

- Iz (A1) koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija više varijabli dobivamo da je

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{\varphi'_x(x,y)\left[\varphi''_{yx}(x,y)+\varphi''_{yy}(x,y)\,g'(x)\right]}{\varphi'_y(x,y)^2} \\
&\quad - \frac{\left[\varphi''_{xx}(x,y)+\varphi''_{xy}(x,y)\,g'(x)\right]\varphi'_y(x,y)}{\varphi'_y(x,y)^2},
\end{aligned}
$$

- Sređivanjem i još jednom upotrebom formule (A1) dobijemo

$$
g''(x) = \frac{\varphi''_{xx}(x,y)+2\varphi''_{xy}(x,y)\,g'(x)++\varphi''_{yy}(x,y)\,g'(x)^2}{-\varphi'_y(x,y)} \qquad \text{(A2)}
$$

- Nadalje, zbog pretpostavke da f ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda, zaključujemo da i $\widetilde{f}$ ima na I neprekidnu prvu i drugu derivaciju.

- Koristeći formulu za deriviranje kompozicije dobivamo da za sve $x \in I$ vrijedi
$$\widetilde{f}'(x) = f_x'(x, y) + f_y'(x, y)\, g'(x)\,. \tag{B1}$$

Problem vezanog ekstrema

- Koristeći formulu za deriviranje kompozicije dobivamo da za sve $x \in I$ vrijedi
$$\widetilde{f}'(x) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\, g'(x). \tag{B1}$$
- Deriviranjem dobijemo

$$\begin{aligned} \widetilde{f}''(x) &= f''_{xx}(x,y) + f''_{xy}(x,y)\, g'(x) + \\ &\quad + \left[f''_{yx}(x,y) + f''_{yy}(x,y)\, g'(x) \right] g'(x) + f'_y(x,y)\, g''(x) \end{aligned}$$

Problem vezanog ekstrema

- Koristeći formulu za deriviranje kompozicije dobivamo da za sve $x \in I$ vrijedi
$$\widetilde{f}'(x) = f_x'(x,y) + f_y'(x,y)\, g'(x)\,. \tag{B1}$$
- Deriviranjem dobijemo
$$\begin{aligned} \widetilde{f}''(x) &= f_{xx}''(x,y) + f_{xy}''(x,y)\, g'(x) + \\ &\quad + \left[f_{yx}''(x,y) + f_{yy}''(x,y)\, g'(x)\right] g'(x) + f_y'(x,y)\, g''(x) \end{aligned}$$
- Nakon sređivanja i korištenja (A2) dobijemo
$$\begin{aligned} \widetilde{f}''(x) &= f_{xx}''(x,y) + 2f_{xy}''(x,y)\, g'(x) + f_{yy}''(x,y)\, g'(x)^2 \qquad \text{(B2)} \\ &\quad -\frac{f_y'(x,y)}{\varphi_y'(x,y)}\left[\varphi_{xx}''(x,y) + 2\varphi_{xy}''(x,y)\, g'(x) + \varphi_{yy}'' g'(x)^2\right]. \end{aligned}$$

Nužni i dovoljni uvjeti lokalnih vezanog ekstrema

Teorem (Nužan i dovoljan uvjet vezanog ekstrema)

Neka funkcije $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *imaju na* D *neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.*

Nužni i dovoljni uvjeti lokalnih vezanog ekstrema

Teorem (Nužan i dovoljan uvjet vezanog ekstrema)

Neka funkcije $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *imaju na* D *neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.*
(i) *Ako* f *u* $(x_0, y_0) \in D$ *u kojoj je* $\varphi_y'(x_0, y_0) \neq 0$ *ima lokalni ekstrem uz uvjet* $\varphi(x, y) = 0$, *onda mora postojati* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *takav da za* (x_0, y_0, λ_0) *vrijedi*

$$\begin{cases} f_x'(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_x'(x_0, y_0) = 0, \\ f_y'(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_y'(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{c}$$

Nužni i dovoljni uvjeti lokalnih vezanog ekstrema

Teorem (Nužan i dovoljan uvjet vezanog ekstrema)

Neka funkcije $f, \varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *imaju na* D *neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.*

(i) *Ako* f *u* $(x_0, y_0) \in D$ *u kojoj je* $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ *ima lokalni ekstrem uz uvjet* $\varphi(x, y) = 0$*, onda mora postojati* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *takav da za* (x_0, y_0, λ_0) *vrijedi*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{c}$$

(ii) *Ako su* $(x_0, y_0) \in D$ *i* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *takvi da* (x_0, y_0, λ_0) *zadovoljava uvjet (c) i ako je*

$$\widetilde{f}''(x_0) \neq 0,$$

pri čemu je $\widetilde{f}''(x)$ *definirano formulom (B2), onda* f *ima u* (x_0, y_0) *lokalni vezani ekstrem uz uvjet* $\varphi(x, y) = 0$ *i to minimum ako je* $\widetilde{f}''(x_0) > 0$*, odnosno maksimum ako je* $\widetilde{f}''(x_0) < 0$.

Napomena

Jasno da se u prethodnim razmatranjima može zamijeniti uloga varijabli x *i* y, *tj. umjesto pretpostavke da je* $\varphi_y'(x_0, y_0) \neq 0$ *mogli smo krenuti od pretpostavke da je* $\varphi_x'(x_0, y_0) \neq 0$.

Nužni i dovoljni uvjeti lokalnih vezanog ekstrema

Napomena

Jasno da se u prethodnim razmatranjima može zamijeniti uloga varijabli x *i* y, *tj. umjesto pretpostavke da je* $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ *mogli smo krenuti od pretpostavke da je* $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$.
Zbog simetrije po x *i* y *nužan uvjet (c) ostao bi isti, dok bi se dovoljan uvjet iskazao pomoću vrijednosti* $\widetilde{f}''(y_0)$.

Nužni i dovoljni uvjeti lokalnih vezanog ekstrema

Napomena

Jasno da se u prethodnim razmatranjima može zamijeniti uloga varijabli x *i* y, *tj. umjesto pretpostavke da je* $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ *mogli smo krenuti od pretpostavke da je* $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$.
Zbog simetrije po x *i* y *nužan uvjet (c) ostao bi isti, dok bi se dovoljan uvjet iskazao pomoću vrijednosti* $\widetilde{f}''(y_0)$.
Pri tome bi $\widetilde{f}''(y)$ *bilo definirano desnom stranom od (B2) u kojoj je* $g'(x)$ *zamijenjeno sa* $g'(y) = -\frac{\varphi'_y(x,y)}{\varphi'_x(x,y)}$, *a faktor* $-\frac{f'_y(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}$ *zamijenjen faktorom* $-\frac{f'_x(x,y)}{\varphi'_x(x,y)}$.

Lagrangeova funkcija

Problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

ponekad rješavamo uvođenjem **Lagrangeove funkcije** (Lagrangeijana) $L(x, y, \lambda)$ triju nezavisnih varijabla x, y i λ:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \qquad (x, y) \in D, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametar λ zove se **Lagrangeov multiplikator**.

Lagrangeova funkcija

Problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

ponekad rješavamo uvođenjem **Lagrangeove funkcije** (Lagrangeijana) $L(x, y, \lambda)$ triju nezavisnih varijabla x, y i λ:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \qquad (x, y) \in D, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametar λ zove se **Lagrangeov multiplikator**.
Očito se nužan uvjet (c) podudara s nužnim uvjetom običnog ekstrema Lagrangeove funkcije $L(x, y, \lambda)$ u točki (x_0, y_0, λ_0).

Lagrangeova funkcija

Dovoljne uvjete nađemo neposrednim računanjem vrijednosti $\widetilde{f}''(x_0)$:

$$\widetilde{f}''(x_0) = \frac{-1}{\varphi_y'(x_0, y_0)^2} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{yy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Dovoljne uvjete nađemo neposrednim računanjem vrijednosti $\widetilde{f}''(x_0)$:

$$\widetilde{f}''(x_0) = \frac{-1}{\varphi_y'(x_0, y_0)^2} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{yy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Naravno, s izmjenjenim ulogama varijabla x i y imali bi

$$\widetilde{f}''(y_0) = \frac{-1}{\varphi_x'(x_0, y_0)^2} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{yy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Lagrangeova funkcija

To nas navodi na sljedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{yy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Lagrangeova funkcija

To nas navodi na sljedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta < 0$ onda f u (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\Delta > 0$ onda f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani maksimum.

Lagrangeova funkcija

To nas navodi na sljedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta < 0$ onda f u (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\Delta > 0$ onda f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani maksimum.

Ako trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c), možemo promatrati i samo vrijednosti

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

To nas navodi na sljedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta < 0$ onda f u (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\Delta > 0$ onda f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani maksimum.
Ako trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c), možemo promatrati i samo vrijednosti

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Vrijedi sljedeće: ako je $\delta > 0$ i $L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, onda je sigurno $\Delta < 0$ pa f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani minimum, a ako je $\delta > 0$ i $L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, onda je sigurno $\Delta > 0$ pa f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani maksimum.

Lagrangeova funkcija

To nas navodi na sljedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta < 0$ onda f u (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\Delta > 0$ onda f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani maksimum.

Ako trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (c), možemo promatrati i samo vrijednosti

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Vrijedi sljedeće: ako je $\delta > 0$ i $L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, onda je sigurno $\Delta < 0$ pa f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani minimum, a ako je $\delta > 0$ i $L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, onda je sigurno $\Delta > 0$ pa f ima u (x_0, y_0) lokalni vezani maksimum.

Ako je $\delta \leq 0$ moramo računati Δ.

Primjer

Neka je zadan problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \longrightarrow \min, \max \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Primjeri

Primjer

Neka je zadan problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \longrightarrow \min, \max \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Pridružena Lagrangeova funkcija je

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(x^2 + y^2 - 2 \right)$$

Primjer

Neka je zadan problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \longrightarrow \min, \max \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Pridružena Lagrangeova funkcija je

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(x^2 + y^2 - 2\right)$$

pa je nužan uvjet ekstrema

$$\begin{aligned} L'_x &= y + 2\lambda x = 0, \\ L'_y &= x + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Primjer

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo

$$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y},$$

odakle slijedi

$$y^2 = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm x.$$

Primjer

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo

$$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y},$$

odakle slijedi

$$y^2 = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm x.$$

Uvrštavanje u treću jednadžbu daje

$$x^2 + (\pm x)^2 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Primjeri

Primjer

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo

$$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y},$$

odakle slijedi

$$y^2 = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm x.$$

Uvrštavanje u treću jednadžbu daje

$$x^2 + (\pm x)^2 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Zaključujemo da postoje četiri točke koje zadovoljavaju nužan uvjet:

$$\begin{aligned} T_1 &= (-1,1)\,, \qquad T_2 = (1,-1)\,, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \\ T_3 &= (-1,-1)\,, \qquad T_4 = (1,1)\,, \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Primjer

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti λ *za sve četiri točke dobivamo* $\delta = 0$ *pa ne možemo donijeti zaključak.*

Primjer

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti λ *za sve četiri točke dobivamo* $\delta = 0$ *pa ne možemo donijeti zaključak.*
Moramo računati

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Primjer

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti λ *za sve četiri točke dobivamo* $\delta = 0$ *pa ne možemo donijeti zaključak.*
Moramo računati

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti x, y *i* λ *za pojedine točke dobivamo:*

- *u točkama* T_1 *i* T_2 *je* $\Delta = -16 < 0$,

Primjeri

Primjer

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti λ *za sve četiri točke dobivamo* $\delta = 0$ *pa ne možemo donijeti zaključak.*
Moramo računati

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti x, y *i* λ *za pojedine točke dobivamo:*

- *u točkama* T_1 *i* T_2 *je* $\Delta = -16 < 0$,
- *u točkama* T_3 *i* T_4 *je* $\Delta = 16 > 0$.

Primjeri

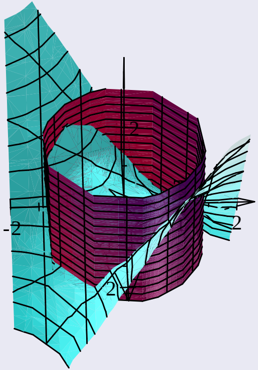
Primjer

Zaključujemo da funkcija $z = xy$ *ima u točkama* T_1 *i* T_2 *lokalni vezani minimum uz dani uvjet* $x^2 + y^2 - 2 = 0$, *a u točkama* T_3 *i* T_4 *lokalni vezani maksimum.*

Primjeri

Primjer

Zaključujemo da funkcija $z = xy$ ima u točkama T_1 i T_2 lokalni vezani minimum uz dani uvjet $x^2 + y^2 - 2 = 0$, a u točkama T_3 i T_4 lokalni vezani maksimum.



Primjeri

Primjer

Za problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \longrightarrow \min, \max \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

imamo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda (x + y - 2).$$

Primjer

Za problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \longrightarrow \min, \max \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

imamo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda (x + y - 2).$$

Nužan uvjet ekstrema je:

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x + \lambda = 0, \\ L'_y &= 2y + \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= x + y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Primjeri

Primjer

Jedina točka koja zadovoljava nužan uvjet je

$$T_0 = (1, 1)\,, \qquad \lambda = -2.$$

Primjeri

Primjer

Jedina točka koja zadovoljava nužan uvjet je

$$T_0 = (1,1)\,, \qquad \lambda = -2.$$

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

vidimo da u T_0 *vrijedi* $L''_{xx}(1,1,-2) = 2 > 0$ *i* $\delta = 4 > 0$.

Primjeri

Primjer

Jedina točka koja zadovoljava nužan uvjet je

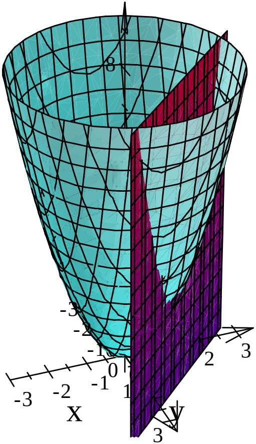
$$T_0 = (1,1)\,, \qquad \lambda = -2.$$

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

vidimo da u T_0 *vrijedi* $L''_{xx}(1,1,-2) = 2 > 0$ *i* $\delta = 4 > 0$.
Dakle ne moramo računati vrijednost Δ *već smijemo zaključiti da funkcija* $z = x^2 + y^2$ *ima u točki* T_0 *lokalni vezani minimum uz dani uvjet* $x + y - 2 = 0$.

Primjeri



$$z = x^2 + y^2 \text{ uz uvjet } x + y - 2 = 0$$

Primjer

Problemu vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \longrightarrow \min, \max \\ y - x = 0 \end{cases}$$

pridružena je Lagrangeova funkcija

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x).$$

Primjeri

Primjer

Problemu vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \to \min, \max \\ y - x = 0 \end{cases}$$

pridružena je Lagrangeova funkcija

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda (y - x).$$

Nužan uvjet ekstrema je

$$\begin{aligned} L'_x &= y - \lambda = 0, \\ L'_y &= x - \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= y - x = 0. \end{aligned}$$

Primjer

Očito je jedino rješenje tih jednadžbi u točki

$$T_0 = (0,0)\,, \qquad \lambda_0 = 0.$$

Primjer

Očito je jedino rješenje tih jednadžbi u točki

$$T_0 = (0,0)\,, \qquad \lambda_0 = 0.$$

Nadalje

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Primjeri

Primjer

Očito je jedino rješenje tih jednadžbi u točki

$$T_0 = (0,0)\,, \qquad \lambda_0 = 0.$$

Nadalje

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

pa moramo računati Δ*. Za sve točke je*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Primjer

Očito je jedino rješenje tih jednadžbi u točki

$$T_0 = (0,0)\,, \qquad \lambda_0 = 0.$$

Nadalje

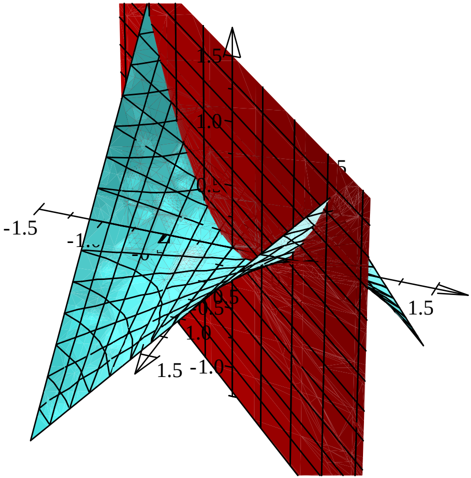
$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

pa moramo računati Δ. *Za sve točke je*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Zaključujemo da $z = xy$ *ima u točki* T_0 *lokalni vezani minimum uz dani uvjet* $y - x = 0$.

Primjeri



$z = xy$ uz uvjet $y - x = 0$